CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune aux 3 options (Mathématiques, Physique, Chimie)

MATHEMATIQUES - PARTIE I

Durée : 2 heures

Les calculatrices ***sont autorisées.***

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

EXERCICE 1 : Étude d'une fonction

On note f la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0.
3. Déterminer les variations de f que l'on présentera dans un tableau.
4. Déterminer, en détaillant les calculs, des réels a, b et c tels que l'on ait pour x appartenant au voisinage de $+\infty$,
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
En déduire que la courbe de f possède une asymptote oblique dont on précisera l'équation ainsi que sa position par rapport à la courbe.
5. De même, pour x appartenant au voisinage de $-\infty$, on a le résultat suivant,
$$f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
En donner une interprétation graphique.

6. Dessiner l'allure de la courbe de f en y faisant figurer la ou les tangente(s) horizontale(s) et les asymptotes.

EXERCICE 2 : Étude d'un système linéaire de suites récurrentes

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = A - 2I_3$ où I_3 désigne la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre réponse.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
3. Calculer N^3.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n en utilisant la formule du binôme de Newton (donner la réponse sous la forme d'un tableau de nombres 3 lignes $\times$ 3 colonnes).
5. On définit pour $n \in \mathbb{N}$, les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & 2v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & 2w_n \end{array} \right. ,$$

avec les conditions initiales $u_0 = v_0 = 1$ et $w_0 = 2$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et de A puis en déduire X_n en fonction de X_0.

   (b) En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

EXERCICE 3 : Un vrai-faux

Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Une suite bornée est convergente.
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

   La série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

3. Pour tout $x > 0$, on a

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

   Indication : on pourra dériver.

4. Soit f une fonction positive et telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge sur $[0;1]$. Si $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors f est nulle sur $[0;1]$.
5. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f n'est pas de classe C^1 en 0.

Fin de l'énoncé