UMPC 2012-2013 LM256

Interrogation écrite numéro 2

Le barème est donné à titre purement informatif et est susceptible de changer en fonction du temps qu'il fait, de mon humeur et de vos copies.

1 Question de Cours [$\pm$ 5points]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction (au moins C^1) et $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteur. Donner dans les coordonnées (x, y, z) la définition de :
1-La divergence de u.
2-Le rotationel de u.
3-le gradient de f.
4-Montrer que rot(grad(f))=0.

Soit Γ une courbe paramètrée par $(x(t), y(t))$ $t \in \mathbb{R}$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ un point régulier. Donner l'équation de la tangente à Γ au point $(x(t_0), y(t_0))$.

2 Calcul vectoriel [$\pm$ 4 points]

Soit $f(x, y, z) = x^3 + 2ycos(z) + sin(y^2)$, calculer $grad(f)$ et $rot(grad(f))$.
Soit $u(x, y, z) = (y^2, xyz, ln(z/x))$, calculer $rot(u)$ et $div(u)$.
Soit $v(x, y, z) = (2xy, x^2 + 3^2z^2, 2y3z + 4z^3)$, trouver g tel que $v = grad(g)$.

3 Théorème des fonctions implicites[$\pm$ 4 points]

1)Montrer que l'équation $xcos(y^2) + y(x^2 - 2) = 0$ définit implicitement y comme une fonction de x au voisinage de $(2, \sqrt{\pi/2})$. Donner l'équation de la tangente en ce point à la courbe considérée.

2)Montrer que l'équation $xy + yz + 2x + 2y - z = 0$ définit implicitement z comme une fonction de (x, y) au voisinage de $(0, 0, 0)$. Donner l'équation du plan tangent en ce point à la surface considérée.

4 Intégrale curviligne [$\pm$ 4points]

Calculer :
1)La circulation du champ de vecteur $V(x, y, z) = (x^2, z, y)$ le long de l'arc paramétré par $t \in [0, 1]$, de point initial $A = (1, 1, 1)$ et de vitesse $v(t) = (1, -2\pi sin(2\pi t), 2(t - 1))$.
2)L'intégrale curviligne I le long de Γ qui est la réunion du segment reliant $(0, 0)$ à $(1, 0)$ puis du segment reliant $(1, 0)$ à $(2, 0)$ et enfin le segment reliant $(2, 0)$ à l'origine où

$$I = \int ydx + xcos(x)dy.$$

5 Integrale mutliple [$\pm$ 4 points]

Calculer :
$\int_{x=0}^{3}\int_{y=1}^{2} xsin(xy)dydx.$
$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} cos(y)xdydx.$
$\iint_D (x+2y)dxdy, \quad D=\{(x,y), 1 \leq x \leq 3, 1+x \leq y \leq 2x\}.$
$\iint_D \frac{2}{x}dxdy, \quad D=\{(x,y), 1 \leq y \leq e, y^2 \leq x \leq y^4\}.$

6 Calcul de l'intégrale de Gauss [$\pm$ 3 points]

Notre but est de calculer $I := \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$. (Pour ceux qui ne connaissent pas cette notation, cela signifie juste que l'on veut calculer la limite de la fonction $\int_0^y e^{-x^2}dx$ quand $y \to \infty$.)
1)Montrer grâce à un changement de variable que :

$$I^2 = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\infty} re^{-r^2}drd\theta$$

2)En déduire I.