

## Chapitre 4 : Intégrales multiples

1. Calculer :

a.  $\int_0^1 \int_0^y x^2 dx dy$

b.  $\int_0^1 \int_0^y y^2 dx dy$

c.  $\int_0^1 \int_0^x -\sin(x^2) dy dx$

d.  $\int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} (2x + 3y^2) dy dx$

e.  $\int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y 2xyz dx$

f.  $\int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{x+y} 3xy dz$

g.  $\int_0^\pi dy \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z \sin(y) dx$

i.  $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-z^2}} dy \int_0^x -yz dz$

2. Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème de Fubini :

a.  $\iint_D 2xy dx dy$ ,  $D = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ .

b.  $\iint_D (x + 2y) dx dy$ ,  $D = \{(x, y), 1 \leq x \leq 3, 1 + x \leq y \leq 2x\}$ .

c.  $\iint_D e^{x/y} dx dy$ ,  $D = \{(x, y), 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2y^3\}$ .

d.  $\iint_D \frac{2}{x} dx dy$ ,  $D = \{(x, y), 1 \leq y \leq e, y^2 \leq x \leq y^4\}$ .

e.  $\iint_D x \cos y dx dy$ ,  $D$  borné par  $y = 0, y = x^2, x = 2$ .

f.  $\iint_D 2xy dx dy$   $D$  le premier quadrant du disque.

g.  $\iint_D ye^{2x} dx dy$ ,  $D$  le triangle plein de sommets  $(0, 0), (2, 4), (6, 0)$ .

h.  $\iint_D x dx dy$ ,  $D = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, yx + y \leq 2\}$ .

i.  $\iint_D x + 2y dx dy$ ,  $D$  le triangle plein de sommets  $(0, 0), (2, 2), (4, 0)$ .

j.  $\iint_D x dx dy$ ,  $D = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$ .

k.  $\int_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}$ ,  $D = \{(x, y), x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 4\}$ .

l.  $\iint_D e^{2x+2y} dx dy$ ,  $D$  le triangle plein de sommets  $(0, 0), (1, 1), (1, -1)$ .

3. Calculer le volume compris entre :

a. La surface d'équation  $z = x^2 + y^2$  et le plan  $z = 4$ .

b. Les surfaces d'équation  $z = x^2 + y^2 - 1$  et  $z = 1 - x^2 - y^2$ .

c. La surface d'équation  $z = x^2 + 4y^2$  et le plan  $z = 4$ .

4. Calculer le volume :

a. Sous le parabolöide  $z = x^2 + y^2$  et sur le domaine délimité par  $y = x^2$  et  $x = y^2$ .

b. Sous le parabolöide  $z = 3x^2 + y^2$  et sur le domaine borné par  $y = x$  et  $x = y$ .

c. Sous la surface  $z = 2xy$  et sur le triangle de sommets  $(1, 1), (4, 1), (1, 2)$ .

d. Compris entre le parabolöide  $x = x^2 + y^2 + 4$  et les plans  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ .

e. Borné par le cylindre  $y^2 + x^2 = 9$  et les plans  $x = 2y, x = 0, z = 0$ .

f. Borné par les cylindres  $x^2 + y^2 = 4$  et  $y^2 + z^2 = 4$ .

Problème : Volume de la boule de dimension n.

On définit la boule unité de dimension  $n$  par l'ensemble suivant

$$B_n(1) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1^2\}.$$

On note  $V_n(1)$  le volume de  $B_n(1)$ . De manière similaire on définit les boules de rayons  $R$ ,  $B_n(R)$  et les volumes associés  $V_n(R)$ .

1. Calculer  $V_1(1), V_1(R), V_2(1), V_2(R), V_3(1), V_3(R)$ .
2. Etablir en général que  $V_n(R) = \int_{-R}^R V_n(\sqrt{R^2 - x^2}) dx$
3. Montrer par récurrence que pour tout  $n$   $V_n$  est une fonction homogène en  $R$ , ie

$$V_n(R) = R^n V_n(1).$$

On ne s'intéressera maintenant qu'à  $V_n(1)$  que l'on notera  $V_n$  pour alléger les notations.

4. Montrer par un changement de variable que

$$V_{n+1} = V_n \int_0^1 u^{n/2} (1-u)^{-1/2} du.$$

Soit la fonction gamma d'Euler définie par  $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

5. Montrer que  $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y) \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ .
6. En déduire que

$$V_{n+1} = V_n \frac{\Gamma(n/2 + 1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n/2 + 3/2)}.$$

7. Montrer que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  (On utilisera un changement de variable et l'intégrale de Gauss :  $G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$  et on calculera cette dernière en considérant  $G^2$  et un changement de variable en polaire.)

8. En déduire que :

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

9. Montrer que pour tout  $x > 0$   $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  et en déduire que

$$V_{2k} = \frac{\pi^{k-1/2}}{k!}$$

et

$$V_{2k+1} = \frac{\pi^{k+1/2}}{(k+1)!}.$$

10. Calculer la limite de  $V_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.