1 Feuille 1

1.1 Cours

Définir les termes fonctions injectives, surjectives et bijectives. Donner des exemples (par exemple des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) .

1.2 Exercices

1) Montrer que $A \cup B = A \cap B$ équivaut à $A = B$.
2) a) On suppose que

$$A \cap B = A \cap C$$

et

$$A \cup B = A \cup C.$$

Que dire de B et C ?
b) Même question si

$$A \cap B \subset A \cap C$$

et

$$A \cup B \subset A \cup C.$$

2 Feuille 2

2.1 Cours

Soit $f : E \mapsto F, (X_1, X_2) \in \mathcal{P}(E)^2, (Y_1, Y_2) \in \mathcal{P}(F)^2$, montrer que :

$$X_1 \subset X_2 \Longrightarrow f(X_1) \subset f(X_2)$$

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$$

$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$$

Donner des exemples. (par exemple des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

2.2 Exercices

1) Soit $f : E \mapsto F$ $X \subset E, \quad Y \subset F$, quel est le lien entre $f \circ f^{-1}(Y)$ et Y. Puis entre $f^{-1} \circ f(X)$ et X.
2)

3 Feuille 3

3.1 Cours

Soit $f : E \mapsto F, (X_1, X_2) \in \mathcal{P}(E)^2, (Y_1, Y_2) \in \mathcal{P}(F)^2$, montrer que :

$$Y_1 \subset Y_2 \Longrightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$$

$$f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$$

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$$

Donner des exemples. (par exemples des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

3.2 Exercices

1) Soit $f : E \mapsto F$. Montrer que si $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ alors f est injective.
2) a) Montrer que ($f \circ g$ injective$\Longrightarrow$ g injective) et que ($f \circ g$ surjective $\Longrightarrow$ f surjective)
b) On suppose que parmi $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ deux sont injectives et une surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives

4 Exo Bonus, durs

1) Construire une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

2)a) Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
b) Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Considérer la partie $A = \{x \in E \| x \notin f(x)\}$.

3) Soit $f : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$ vérifiant $f(x, y) = y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ Montrer que f est une bijection. Préciser pour $n \in \mathbb{N}$ donné, son antécédent.