*Les calculatrices* ***sont autorisées****.*

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

# Étude d'une série de Fourier où on ne peut appliquer le théorème de Dirichlet

L'objectif du problème est d'étudier la convergence de la série de Fourier d'une fonction qui n'est pas de classe $C^1$ par morceaux, donc pour laquelle on ne peut appliquer le théorème de Dirichlet.

## I Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. *Questions préliminaires*
   (a) Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. En déduire la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.
   (b) Donner l'allure de la courbe de la fonction $t \mapsto |\sin t|$ sur $[0, 2\pi]$ puis calculer pour tout entier $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t$.

2. Donner un équivalent simple en $0^+$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$. En déduire que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est bien définie et est de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$.
3. (a) Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
4. Montrer avec soin qu'une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et qui admet une limite finie en $+\infty$ est bornée. En déduire que $F$ est une fonction bornée.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est-elle absolument convergente ?

## II Étude d'une fonction $2\pi$-périodique

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi$-périodique, paire définie sur $[0, \pi[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
   On note :

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geqslant 1} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

   sa série de Fourier.
   (a) Tracer l'allure de la courbe de $f$. On pourra observer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction $f$ est-elle dérivable en $\pi$ ? Justifier.
   (c) Justifier que la restriction de $f$ à $]0, \pi[$ n'est pas prolongeable en 0 en une fonction de classe $C^1$.

   La fonction $f$ n'est donc pas de classe $C^1$ par morceaux, on ne peut donc pas appliquer le théorème de Dirichlet pour étudier la convergence de sa série de Fourier.

7. *Étude des coefficients de Fourier*
   (a) Calculer $a_0(f)$ et donner la valeur de $b_n(f)$ pour $n \geqslant 1$.
   (b) Soit $n \geqslant 1$. Exprimer $a_n(f)$ à l'aide de la fonction $F$. Plus précisément, déterminer $u$ et $v$ tels que $a_n(f) = \dfrac{uF(v)}{n^{3/2}}$.
   (c) En déduire que $a_n(f) = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, c'est-à-dire il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant 1, \quad |a_n(f)| \leqslant \frac{M}{n^{3/2}}.$$

8. Justifier que la série $\sum_{n \geqslant 1} (|a_n(f)| + |b_n(f)|)$ converge. En déduire que la série de Fourier de $f$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note $g$ sa somme, c'est-à-dire pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx).$$

9. Donner la parité et la périodicité de $g$.
10. Justifier avec soin que la fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
11. (a) Soit $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 0$ deux entiers. Calculer $\int_0^{\pi} \cos(pt) \cos(nt) \, \mathrm{d}t$. On pourra distinguer les cas $n = p$ et $n \neq p$.
    (b) Montrer que la fonction $g$ a les mêmes coefficients de Fourier que $f$ (pour cela, on justifiera avec soin une permutation série intégrale).

## III Conclusion

Le but de cette dernière partie est de prouver que les fonctions $f$ et $g$ sont égales, donc que la série de Fourier de $f$ converge bien vers $f$.

On note $E$ l'ensemble des fonctions $2\pi$-périodiques continues par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des fonctions **continues** (et $2\pi$-périodiques) sur $\mathbb{R}$.

Si $u \in E$, on note $(a_n(u))_{n \geqslant 0}$ et $(b_n(u))_{n \geqslant 1}$ ses coefficients de Fourier.

12. Soient $u$ et $v$ deux fonctions de $E$. Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$a_n(u - v) = a_n(u) - a_n(v) \ .$$

On montre de même mais cela n'est pas demandé que $b_n(u - v) = b_n(u) - b_n(v)$.

Si $u$ et $v$ sont deux fonctions de $E$, on pose :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) v(t) \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

13. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $F$. Que peut-on en déduire pour l'application $\| \cdot \|_2$ de $F$ dans $\mathbb{R}$ ?
14. Soit $h$ une fonction de $F$. Montrer que si tous ses coefficients de Fourier sont nuls, alors $h$ est nulle (on pourra exprimer $\|h\|_2$ en fonction des coefficients de Fourier de $h$).
15. Montrer que le résultat précédent est faux pour une fonction $h$ de $E$ qui n'est pas continue (on pourra donner un contre-exemple).
16. Déduire avec précision de tous les résultats précédents que l'on a bien $f = g$.

**Fin de l'énoncé**