Feuille d'Exercices 1

Suites numériques

Exercice 1.1.— Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{(\exp(2x)-1)\sin x}{1-\cos x}$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+2x)}{\exp(x^2)-1}$.

Exercice 1.2.— Indiquer avec une brève justification si chacun des énoncés suivants est vrai pour deux suites de réels $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Si U est croissante et convergente, elle est majorée.

2. Si U est majorée et convergente, elle est croissante.

3. Si U est décroissante et positive, elle converge.

4. Si U est croissante et non majorée , alors, $\lim\,(u_n)=+\infty$.

5. Si U tend vers 0, UV tend vers 0.

Exercice 1.3.— On veut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy et conclure.

Exercice 1.4.— **(Moyenne de Cesaro)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers l (avec l un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).

1. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.

2. Montrer que la réciproque n'est pas vraie en général.

Exercice 1.5.— Étudier la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{2u_n}$.

Exercice 1.6.— Etudier la suite u_n définie par $u_0=0$ et $\forall n\geq 1$, $u_{n+1}=\dfrac{3u_n-2}{2u_n-1}$

Exercice 1.7.— Trouvez un exemple de suites u_n telle que u_n^2 converge sans que la suite u_n converge.

Exercice 1.8.— Soit u_n une suite de nombres complexes convergeant vers un nombre complexe l.

1. Montrez que la suite u_n est bornée.

2. En déduire, sans utiliser les théorèmes généraux sur les limites des produits de suites, que la suite u_n^2 tend vers l^2.

Exercice 1.9.— Pour $n \geq 0$, on pose $a_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{p=2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+p}}$. Trouvez, à l'aide d'un encadrement, la limite de la suite a_n.

Exercice 1.10.— Soit a_n la suite définie par $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On définit les suites u_n et v_n par $u_n = a_{2n}$ et $v_n = a_{2n+1}$. Montrez que les suites u_n et v_n sont adjacentes. En déduire que a_n converge.

Exercice 1.11.— Soient u_n et v_n deux suites de nombres complexes convergeant respectivement vers l et l'.

1. Montrez que la suite $w_n = u_n v_n$ converge vers ll'.

2. Si $l \neq 0$, montrez que $\frac{1}{u_n}$ converge vers $\frac{1}{l}$.

3. Traitez le cas où $l = 0$.

Exercice 1.12.— Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\forall n \geq 0, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

On suppose que la suite v_n converge vers une limite l.

1. On suppose $l < 1$. Montrez que la suite u_n tend vers 0. Montrez que la suite $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ converge.

2. On suppose $l > 1$. Montrez que la suite u_n diverge.

3. On suppose $l = 1$. Montrez à l'aide d'exemples qu'on ne peut rien dire ni sur la convergence de u_n.

Exercice 1.13.— Montrer que si la fonction g est continue positive et décroissante sur $]0, +\infty[$, alors on a :

$$\int_1^{n+1} g(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} g(k) \leq g(1) + \int_1^{n} g(x)dx.$$

1. En déduire la convergence de la suite $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$.

2. En déduire le comportement de la suite définie par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 1.14.— (classique) Soient a et b deux réels tels que $0 < b < a$. On définit les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ par :

$$a_0 = a, \;\; b_0 = b \;\text{ et}$$

$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \;\text{ et }\; b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}.$$

Montrez que pour tout $n \geq 0$, $a_n \geq b_n$. En déduire que les suites a_n et b_n convergent vers une même limite l qu'on appelle moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Exercice 1.15.— (classique) On considère les deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \;\text{ et }\; v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

1. Montrer que :

- **a.** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ;
- **b.** la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ;
- **c.** pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$;
- **d.** $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

2. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et de même limite. Cette limite est le nombre réel e.

3. En utilisant que e est compris entre u_n et v_n, montrer que e est irrationnel (on effectuera un raisonnement par l'absurde, en supposant que $e = \frac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbb{N}^*$.
