

---

## Feuille d'Exercices 5

Séries de fonctions

---

**Exercice 5.1.**— Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $f_n(x) = \frac{xe^{-n^2x}}{1+n^2x}$ . Montrer que la série de fonctions  $f_n$  est **normalement convergente sur**  $\mathbb{R}_+$ .

---

**Exercice 5.2.**— Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $f_n(x) = nxe^{-nx}$ .

1. Montrer que la série de fonctions  $(\sum f_n)$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}_+$ .
  2. On fixe  $n \in \mathbb{N}$  et on pose  $u_n = \text{Sup} \{|f_n(x)|, x \in \mathbb{R}_+\}$ . Calculer  $u_n$ .
  3. Montrer que la série de fonctions  $(\sum f_n)$  n'est pas normalement convergente sur  $\mathbb{R}_+$ .
  4. Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Montrer que la série de fonctions  $(\sum f_n)$  est normalement convergente sur  $[\varepsilon, +\infty[$ .
- 

**Exercice 5.3.**— Pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $f_n(x) = \frac{1}{n(1+nx)}$ .

1. Montrer que la série de fonctions  $(\sum f_n)$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Est-elle convergente en 0? Pour  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ .
2.
  - a. Montrer que la série de fonctions  $(\sum f_n)$  est normalement convergente sur  $[\varepsilon, +\infty[$ .
  - b. Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $[\varepsilon, +\infty[$ .
3. Peut-on déduire de la question précédente les assertions suivantes? Justifier votre réponse.
  - a. la série de fonction  $(\sum f_n)$  est normalement convergente sur  $]0, +\infty[$ .
  - b. La fonction  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

On dit que la propriété "être normalement convergente" est une propriété **globale**, tandis que la propriété "être continue" est **locale**. La propriété "être dérivable" est également locale.

---

**Exercice 5.4.**— Pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(\frac{x}{n})$ .

1. Montrer que la série de fonctions  $(\sum f_n)$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}$ . Est-elle normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ ? On appelle  $f$  la fonction somme de la série  $(\sum f_n)$ .
  2. Soit  $a$  un réel strictement positif. Montrer que la série de fonction  $(\sum f_n)$  est normalement convergente sur l'intervalle  $[-a, a]$ .
  3. En déduire que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
  4. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
-

---

**Exercice 5.5.**— Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , posons

$$f_n(x) = x^2 e^{-nx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

1. Etude de la série de fonctions  $(\sum f_n)$ .

a. Montrer que la série de fonctions  $(\sum f_n)$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$ .

On pose  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

b. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

c. Calculer  $f(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

2. Etude de la série de fonctions  $(\sum F_n)$ .

a. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . A l'aide de deux intégrations par parties, calculer  $F_n(x)$ .

b. Montrer que la série de fonctions  $(\sum F_n)$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}_+$ .

On pose  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .

c. Exprimer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  sous forme d'une somme de série.

3. Montrer que  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .

4. En déduire l'identité suivante :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

---

**Exercice 5.6.**— On reprend les fonctions  $f_n(x)$  de l'exercice 6.3, définies sur  $\mathbb{R}_+$ . On note  $f$  la fonction somme de la série  $(\sum f_n)$ , définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Rappelons que la série de fonctions  $(\sum f_n)$  n'est pas normalement convergente sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On souhaite néanmoins calculer la limite de  $f$  en 0. On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(1+kx)} \quad \text{et} \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Montrer que  $f$  est positive et décroissante.

2. Montrer que pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^*$  on a  $S_n(x) \leq f(x)$ .

3. Montrer qu'on a  $S_n(\frac{1}{n}) \geq \frac{1}{2} H_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

4. Quelle est la limite de la suite  $(H_n)$ ? En déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = +\infty$ .

5. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ , en utilisant les questions 1 et 4.

---

**Exercice 5.7.**— Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{2^n}$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et indéfiniment dérivable.

2. Calculer explicitement  $f(x)$ .

---

---

**Exercice 5.8.**— Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la série de fonctions de terme général  $f_n(x) = (-1)^n \frac{n+x}{n^\alpha}$  est elle

1. Simplement convergente sur  $\mathbb{R}$ .
  2. Absolument convergente sur  $\mathbb{R}$ .
  3. Normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ .
  4. Normalement convergente sur  $[-A, A]$  pour tout  $A > 0$ .
- 

**Exercice 5.9.**— 1. Montrer que la série de terme général  $\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$  est normalement convergente sur  $[-1, 1]$

2. Calculer sa somme pour  $|x| < 1$  en justifiant soigneusement.
  3. En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ .
- 

**Exercice 5.10.**— Soit  $n \geq 1$  et  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ .

1. La série de fonctions est-elle simplement convergente ? Normalement convergente sur  $\mathbb{R}$  ? Sur un intervalle ?
  2. La série de fonctions  $f'_n$  est elle convergente ? Normalement convergente sur  $\mathbb{R}$  ? Sur  $[0, A]$  avec  $A > 0$  ?
  3. Montrer que  $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ .
-