

---

## Feuille d'Exercices 7

Intégrales à paramètre - Convergence dominée

---

**Exercice 7.1.**— Déterminer les limites des suites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt, & \text{(ii)} \quad v_n &= \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt, & \text{(iii)} \quad w_n &= \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^n)^{1+\frac{1}{n}}}, \\ \text{(iv)} \quad x_n &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t+n}}, & \text{(v)} \quad y_n &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2t^2} dt, & \text{(vi)} \quad z_n &= \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt. \end{aligned}$$

---

**Exercice 7.2.**— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une application continue bornée avec  $f(0) \neq 0$ .

1. Justifier l'existence de

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} f(t)}{\sqrt{t}} dt.$$

2. En effectuant un changement de variable et en utilisant le théorème de convergence dominée, trouver un équivalent de  $a_n$  quand  $n$  tend vers l'infini. (On rappelle l'intégrale de Gauss  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .)

---

**Exercice 7.3.**— Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue telle que la fonction  $g : t \rightarrow e^{-t} f(t)$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n f(t) dt.$$

---

**Exercice 7.4.**— Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . On suppose que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(t)}{1+n^2t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} f(0).$$

---

**Exercice 7.5.**— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$

1. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$ . Pour tout nombre réel  $x$ , exprimer  $f'(x)$  comme intégrale à paramètre.

2. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^2$ .

3. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $xy'' + y' + xy = 0$ .

---

---

**Exercice 7.6.**— Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 \cos^2 t + \sin^2 t) dt.$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$ .
  2. Soit  $x > 0$  tel que  $x \neq 1$ . Calculer  $f'(x)$  à l'aide du changement de variable  $u = \tan t$ .
  3. En déduire une expression explicite de  $f(x)$  pour tout  $x > 0$ .
- 

**Exercice 7.7.**— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} dt$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$ .
  2. Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = a - \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
  3. Montrer que l'on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . En déduire l'égalité  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .
- 

**Exercice 7.8.**— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$ .
  2. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' = -\frac{x}{2}y$ .
  3. En déduire une expression explicite de  $f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- 

**Exercice 7.9.**— 1. Montrer que pour tout réel  $x$  on a  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} = x$ . En déduire que

l'application  $\varphi : \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $\varphi(x, t) = \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}$  pour  $t > 0$  et  $\varphi(x, 0) = x$  est continue.

2. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$  est convergente pour tout  $x$  réel. On note  $F(x)$  cette intégrale.

3. Montrer que la fonction  $F$  ainsi définie est impaire et continue.

4. Montrer que la fonction  $F$  est de classe  $C^1$ .

5. Calculer  $F'(x)$  pour  $x \neq 1$ . On pourra utiliser la décomposition suivante :

$$\frac{1}{(1+T)(1+aT)} = \frac{1}{1-a} \left( \frac{1}{1+T} - \frac{a}{1+aT} \right).$$

6. Calculer  $F(0)$  et déduire de ce qui précède une expression explicite de la fonction  $F$  (on pourra faire le calcul d'abord pour  $x > 0$ ).

---

---

**Exercice 7.10.**— Calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est continue.

2. Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$  et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation  $y + y'' = \frac{1}{x}$ .

3. Montrer que  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

4. Montrer que  $f$  est la seule solution de l'équation différentielle  $y + y'' = \frac{1}{x}$  sur  $]0, +\infty[$  ayant une limite finie en  $+\infty$ .

5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout nombre réel  $x > 0$ , les intégrales impropres  $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  et  $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$  sont convergentes.

6. Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt.$$

7. En déduire l'égalité  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

---

**Exercice 7.11.**— La fonction Gamma.

1. Montrer que pour tout réel  $x > 0$ , l'intégrale impropre  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  est convergente.

2. Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ; en déduire la valeur  $\Gamma(n)$  pour  $n$  entier strictement positif.

3. Montrer que la fonction  $\Gamma$  est de classe  $C^2$  et convexe. En déduire que  $\Gamma$  atteint son minimum en un point de l'intervalle  $]1, 2[$ .

4. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} (x\Gamma(x)) = 1$  et dessiner l'allure du graphe de  $\Gamma$ .

5. On définit, pour  $x > 1$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , les fonctions  $u_n(x) : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $[u_n(x)](t) = e^{-nt} t^{x-1}$ .

a. Montrer que la série de fonctions  $\sum u_n(x)$  converge normalement sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$ , où  $a > 0$ .

b. Montrer que  $\int_0^{+\infty} [u_n(x)](t) dt$  est convergente et que l'on a  $\int_0^{+\infty} [u_n(x)](t) dt = \frac{1}{n^x} \Gamma(x)$ .

c. En déduire l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \zeta(x) \Gamma(x),$$

où  $\zeta$  désigne la fonction de Riemann, définie comme somme de la série de fonctions  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ .

---

---

**Exercice 7.12.**— Montrer les égalités suivantes :

$$(i) \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (ii) \int_0^1 \frac{t^2 \ln(t)}{t^2-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad (iii) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^{\sqrt{t}}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}.$$


---

**Exercice 7.13.**— Soit  $-1 < a < 1$ . On considère la suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée par

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], u_n(t) = \cos(t)^n a^n.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} |u_n(t)| dt \leq \frac{\pi}{2} |a|^n.$$

2. En déduire que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - a \cos(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt \right) a^n.$$


---

**Exercice 7.14.**— Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère la suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, u_n(t) = e^{-nt} \sin(at).$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt \leq \frac{|a|}{n^2}.$$

2. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}.$$


---

**Exercice 7.15.**—

1. Déterminer l'intervalle de définition et de continuité des fonctions suivantes :

$$(i) \forall x \geq 0, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t+x}(1+t^4)},$$

$$(ii) \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^1 t^{tx} dt,$$

$$(iii) \forall x \geq 0, h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} dt.$$

2. Déterminer l'intervalle de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes :

$$(iv) \forall x > 0, \phi(x) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{x+t} dt,$$

$$(v) \forall x \geq 0, \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt,$$

$$(vi) \forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$


---