Feuille d'Exercices 8

Séries trigonométrique

Exercice 8.1.— Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la fonction périodique de période 2π donnée par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = x^2.$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. Calculer la somme de la série de Fourier de f.
3. En déduire la valeur des séries

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \ (ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \ (iii) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \ (iv) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 8.2.— Soit $0 < \alpha < \pi$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ périodique de période 2π donnée par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. Calculer la somme de la série de Fourier de f.
3. En déduire la valeur des séries

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}, \ (ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\alpha)^2}{n^2}.$$

Exercice 8.3.— Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ periodique de periode 2π donnée par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \cos(\alpha x).$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. Calculer la somme de la série de Fourier de f.
3. En déduire la valeur des séries

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}, \ (ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

Exercice 8.4.— Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la fonction impaire, périodique de période 2π donnée par

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, \text{ si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.

2. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer le développement en série de Fourier de la primitive nulle en 0 de la fonction f.

4. En déduire la valeur de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 8.5.— Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \cosh(\alpha x)$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ (avec $\alpha > 0$).

1. Calculer les coefficients de Fourier de f et étudier la convergence de la série de Fourier.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}$.

3. En utilisant la formule de Parseval calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + n^2)^2}$.

4. Déduire de ce qui précède les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \sinh(\alpha x)$ pour $x \in] - \pi, \pi]$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2}$.