CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune aux 3 options (Mathématiques, Physique, Chimie)

MATHEMATIQUES - PARTIE I

Durée : 2 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1. Une étude de fonction

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad f(0) = 1\ .$$

1. Démontrer que la fonction f est continue en 0.

2. En détaillant les calculs, déterminer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.

3. En déduire que f est dérivable en 0, préciser $f'(0)$.

4. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1-x)e^x - 1\ .$$

- **(a)** Déterminer le signe de la fonction g.
- **(b)** En déduire les variations de la fonction f.

5. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

6. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

7. Un calcul non demandé montre que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = 0\ .$$

Que peut-on en déduire quant à la courbe de f ?

Exercice 2. Autour des symétries

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, on appelle symétrie vectorielle de E, tout endomorphisme s de E vérifiant :

$$s^2 = \mathrm{id}\,.$$

On rappelle que $s^2 = s \circ s$ et que id désigne l'application identité de E.

Dans cet exercice, on étudie quelques exemples de symétries vectorielles et leur diagonalisation.

1. *Un exemple*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

- **(a)** Justifier que u est une symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.
- **(b)** Démontrer que u est diagonalisable. Donner une matrice D diagonale et une matrice P inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.

2. *Cas général*

Soit s une symétrie vectorielle de E.

(a) Démontrer que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) = \{0\}$.

(b) Soit $x \in E$, montrer que le vecteur $y = \dfrac{1}{2}(s(x) + x)$ est dans $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$.

(c) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$.

(d) En déduire que s est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

3. *Une application*

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices d'ordre n à coefficients réels, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$f(M) = {}^tM.$$

(a) Déduire des résultats précédents, que l'on a la somme directe :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

(b) Dans cette question uniquement, on prendra $n = 2$.
Donner la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 3. Un vrai-faux

Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$.

2. Si (u_n) est une suite divergente à termes strictement positifs, alors elle tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On a : $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

4. Soit f une fonction continue sur $]0\,;1]$. Si $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

5. La tangente à la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \mathrm{e}^{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 5$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 12 1282 – D'après documents fournis