UMPC 2012-2013 TD 3 LM256 - Olivier Glorieux

Chapitre 3 : Intégrales curvilignes

1 Calcul d'une intégrale curviligne

Calculer les intégrales curvilignes suivantes

1.
$$\int_\Gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$
où Γ est l'arc circulaire paramétré par $(r\cos(t), r\sin(t), ht)$, avec $r, h \in \mathbb{R}_+^*$, $t \in [0, 2\pi[$.

2.
$$\int_\Gamma y^2 dx + x^2 dy,$$
où Γ est la demi-cercle supérieur parcouru dans le sens positif.

3.
$$\int_\Gamma xy^2 dx - yx^2 dy,$$
le long du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$, parcouru dans le sens positif.

2 Travail sur une demi-ellipse

Calculer le travail du champ de force $V(x,y) = (y^2, x^2)$, le long d'une demi-ellipse de demi-axe (a,b) à l'aide de la formule

1. $\int V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$.
2. $\int_G P dx + Q dy$.

3 La cylcoïde

1. Une roue de vélo $\mathcal{C}$ de rayon R>0, roule sans glisser sur l'axe (Ox). Soit Ω le centre de la roue et M le point de tangence entre la roue et le l'axe (Ox) à l'instant 0. On suppose que la rotation angulaire de la roue se fait à vitesse constante 1. Soit $M(t)$ la position de M à l'instant t. Montrer que les coordonnées de $M(t)$ sont données par
$$\begin{cases} x(t) &= R(t - \sin(t)) \\ y(t) &= R(1 - \cos(t)) \end{cases}$$
2. Etudier et dessiner la courbe décrite par M. Cette courbe s'appelle une *cyloïde.*
3. Déterminer l'aire de la surface délimitée par une période de la cycloïde.